

BUESAQUILLO, MONTILLA Y MARMOLEJO. 2026. Instrumento de análisis para caracterizar la enseñanza del ortocentro desde una perspectiva visual e inclusiva. Visualización e inclusión en la enseñanza del ortocentro. Revista Sigma, 22 (1). Páginas 48–67.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Volumen XXII N.º 2 (2026), páginas 48–67

Universidad de Nariño

Instrumento de análisis para caracterizar la enseñanza del ortocentro desde una perspectiva visual e inclusiva. Visualización e inclusión en la enseñanza del ortocentro

Diana Yasmin Buesaquillo Carpio ¹

Rosa Elizabeth Montilla Jojoa ²

Gustavo-Adolfo Marmolejo ³

Abstract: This article presents a methodological instrument that characterizes the way in which a group of mathematician educators in training provoke the inclusion of a student with specific learning difficulties, through the teaching of the orthocenter from a visual perspective. The design of the instrument was carried out in a deductive and inductive way. The units of analysis were the slogans used by the educators in the activities of a teaching-learning sequence, the attention fell on the visual and inclusive strategies contemplated to elicit participation. A total of five categories of analysis make up the instrument, three of a visual nature, two of issues related to inclusion. To expose the power of the instrument, its application was exemplified in one of the instructions in the sequence.

Keywords. Visualization, Inclusion, Participation, Specific learning difficulties.

Resumen: Este artículo expone un instrumento metodológico que caracteriza la forma como un grupo de educadores matemáticos en formación suscitan la inclusión de un estudiante con dificultades específicas de aprendizaje, a través de la enseñanza del ortocentro desde una perspectiva visual. El diseño del instrumento se realizó de forma deductiva e inductiva. Las unidades de análisis

¹Licenciatura de Matemáticas, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia. Correo electrónico: dianitabuesaquillo15@gmail.com, Código orcid: <https://orcid.org/0000-0001-6297-2524>.

²Licenciatura de Matemáticas, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia. Correo electrónico: rouselizabeth6@gmail.com, Código orcid: <https://orcid.org/0000-0001-8336-2581>.

³Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia. Correo electrónico: gustavo.marmolejo.mat@gmail.com, Código orcid: <https://orcid.org/0000-0001-9047-4389>.

fueron las consignas utilizadas por los educadores en las actividades de una secuencia de enseñanza-aprendizaje, la atención recayó en las estrategias visuales e inclusivas contempladas para suscitar la participación. Un total de cinco categorías de análisis conforman el instrumento, tres de naturaleza visual, dos de cuestiones alusivas a la inclusión. Para exponer la potencia del instrumento se ejemplificó su aplicación en una de las consignas de la secuencia.

Palabras Clave. Visualización, Inclusión, Participación, Dificultades específicas de aprendizaje.

1. Introducción

El aprendizaje de la geometría ocurre mediante la coordinación de actividades cognitivas de visualización, razonamiento y construcción, cada una con funciones epistemológicas específicas. Si bien el desarrollo del funcionamiento cognitivo de cada una ocurre de manera separada, la visualización puede privilegiarse en la enseñanza escolar básica de la geometría como la puerta de entrada, soporte e impulso para las actividades de razonamiento y construcción (Duval, 1998). No obstante, el estudio de la geometría evidenció una “desvisualización” en gran parte del siglo XX. Esta tendencia se debió a que se le consideró innecesaria y se le asumió como un obstáculo para el desarrollo de las matemáticas. Los computadores gráficos y los programas informáticos unido al desarrollo de estudios sobre el funcionamiento de la mente suscitaron de nuevo el interés por el papel que desempeña esta actividad cognitiva en el estudio de la geometría (Marmolejo, Prada e Insuasty, 2020).

En la actualidad, existe una tendencia cada vez más fuerte a reconocer la importancia y el interés por la visualización. Como lo indica una exhaustiva revisión de la literatura especializada, son enormes y variados los aportes que la investigación en educación matemática ha realizado en torno a la visualización. Entre ellos destacan el estudio del vínculo de la visualización con otras actividades y procesos cognitivos (Mesquita, 1989; Rivera y Becker, 2008; Sánchez, 2003; Marmolejo y Mosquera, 2021), la discriminación del papel de la visualización en la construcción de contenidos matemáticos específicos (Lemonidis, 1991; Outhred y Mitchellmore, 2000; Marmolejo, Guzman e Insuasty, 2015; Marmolejo y González, 2015a) y cómo los entornos informáticos facilitan el recurso de la visualización (Kordaki, 2003). También, son cuestiones de interés tanto la discriminación de elementos que favorecen el desarrollo de la visualización (Duval, 2017; Markovits, Rosenfeld y Eylon, 2006; Marmolejo, Prada e Insuasty, 2020; Marmolejo y Gonzalez, 2013a, 2013b, 2015a; 2015b; Marmolejo, 2021), como la incidencia de los educadores en el desarrollo visual de los estudiantes (Presmeg, 1986; Markovits Rosenfeld y Eylon, 2006; Marmolejo, Sánchez y Londoño, 2017), asimismo, es cuestión de interés la identificación de dificultades al discriminar, clasificar y operar figuras bidimensionales (Clements et al, 1999; Moriena y Scaglia, 2003; Walcott, Mohr y Kastberg, 2009).

Es claro que son variados los aportes que la investigación en educación matemática ha realizado en torno a la visualización. Pero, hasta el momento, no existen estudios que exploren cómo la enseñanza de la geometría desde una perspectiva visual permite o no considerar las necesidades específicas de los estudiantes con el fin de eliminar las barreras que impiden su participación y libre desarrollo, en palabras del Ministerio de Educación Nacional colombiano, la inclusión.

Lo cual es una cuestión determinante para la enseñanza de las matemáticas en Colombia, pues, en este país se reglamenta la educación inclusiva como un proceso a promover en todas las instituciones educativas colombianas,

Un proceso permanente que reconoce, valora y responde de manera pertinente a la diversidad de características, intereses, posibilidades y expectativas de las niñas, niños, adolescentes, jóvenes y adultos, cuyo objetivo es promover su desarrollo, aprendizaje y participación, con pares de su misma edad, en un ambiente de aprendizaje común, sin discriminación o exclusión alguna (Decreto 1421, 2017, p.5)

En este sentido, es necesario realizar estudios que aporten elementos de reflexión para que los educadores puedan en su praxis educativa asignar sentido y funcionalidad al concepto de inclusión. Desde esta perspectiva son cuestiones de interés: ¿cuáles estrategias introducen los educadores al promover la inclusión de poblaciones específicas a través de la enseñanza de objetos geométricos desde un enfoque visual? ¿cómo estos educadores evalúan el alcance de las estrategias de inclusión consideradas? ¿Cómo los estudiantes reaccionan ante la aplicación de tales estrategias?

Con el objeto de aportar respuestas tentativas a las cuestiones reseñadas se consideró como propósito de esta investigación definir un instrumento metodológico que determine cómo un grupo de educadores matemáticos en formación (EMF) al suscitar el estudio del ortocentro desde un enfoque visual promueven la inclusión de un estudiante con dificultades específicas de aprendizaje (DEA). Se privilegió, la temática ortocentro de figuras triangulares, pues su aprendizaje coincide, en gran medida, con características básicas que facilitan el desarrollo de la visualización, es el caso, de la transformación de figuras y la no exigencia de razonamientos de naturaleza deductiva ni de construcción con instrumentos geométricos (Duval, 2017). La población seleccionada, por su parte, se decidió, pues, los DEA constituyen el tipo de población con la cual, en mayor frecuencia, se encuentran los educadores en el aula, y donde el riesgo de ser excluidos es mayor, pues, sus formas de proceder tienden a retrasar el trabajo global.

En cuanto a la perspectiva teórica asumida, se considera que la visualización tiene matices y características diferentes según el tipo de representación semiótico⁴ que se contemple (Duval, 2017). En este sentido, el interés recae en el registro semiótico de las figuras geométricas bidimensionales, puesto que este tipo de representación es un soporte intuitivo que ayuda a dotar de sentido y significado el aprendizaje de la geometría. Las representaciones figurales son las que permiten la conducta de abducción, esto es, la de delimitar de entrada la clase de hipótesis o alternativas que han de considerarse en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración (Duval, 2017). Hablar del papel heurístico de las figuras es decir que la conducta de abducción es la que guía la deducción. (Duval, 2017). No obstante, hacer de las figuras herramientas heurísticas potentes para la comprensión y la resolución de problemas geométricos está lejos de ser obvio y espontáneo (Duval, 2017; Marmolejo y Vega, 2012; Marmolejo, Prada e Insuasty, 2020).

Para describir cuál es el aporte heurístico de una figura se precisa distinguir el tipo de aprehensión susceptible de sugerir la solución al problema planteado (Duval, 2017). En este estudio la atención focaliza en la aprehensión operatoria, es decir, en la transformación heurística de las figuras (Duval, 2003). Por un lado, se considera las posibilidades de exploración heurística que permiten las figuras en torno a la aplicación de modificaciones de naturaleza posicional. Por otro lado, se contempla el cambio dimensional (Duval, 2004), es decir, el acto de descomponer una figura (dimensión 2) en unidades figurales de dimensión

⁴ “Las representaciones semióticas son a la vez representaciones conscientes y externas... permiten una mirada del objeto a través de la percepción de estímulos (puntos, trazos, caracteres, sonidos...) que tienen el valor de significantes” (Duval, 1999, p. 34). Las figuras geométricas, los gráficos cartesianos, los esquemas, la escritura aritmética y algebraica, las tablas son algunas de las representaciones semióticas de mayor uso en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

inferior a la de la figura (dimensiones 0 y 1). En este sentido, se asume en esta investigación el termino visualización como la discriminación y operatividad de los elementos constitutivos que, en una configuración geométrica bidimensional, intervienen en la comprensión o resolución de una tarea geométrica.

2. Método y materiales

Esta es una investigación de carácter cualitativo con un enfoque de estudio de caso: se busca comprender los fenómenos analizados en una población determinada explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto (Hernández y Torres, 2018). El caso analizado consistió en un grupo de doce EMF del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño (Colombia), los cuales participaban en un curso electivo (semestre 8) encaminado a suscitar estrategias de enseñanza que favorezcan la inclusión en el aula a través del estudio de objetos geométricos desde un enfoque cognitivo. Puntualmente, la atención de esta investigación recayó en la discriminación de las estrategias diseñadas por los EMF para intentar favorecer la inclusión de un estudiante con DEA a través del estudio del ortocentro desde una perspectiva visual.

En cuanto al trabajo de campo, primero se diseñó una secuencia de enseñanza-aprendizaje (SEA) donde la deconstrucción dimensional de formas (Duval, 2004) fue la actividad cognitiva considerada para favorecer el estudio del ortocentro. A continuación, se reseñan el objetivo educativo de cada momento de aplicación de la SEA y de cada una de las actividades planteadas (Ver Tabla 1):

Tabla 1: Momentos de la secuencia enseñanza - aprendizaje

<p><i>Primer momento de aplicación:</i> discriminar el punto de intersección de las alturas de un triángulo acutángulo.</p> <ul style="list-style-type: none">■ Actividad 1.1: discriminar alturas en un triángulo acutángulo.■ Actividad 1.2: discriminación del ortocentro de un triángulo acutángulo. <p><i>Segundo momento de aplicación:</i> Establecer el punto de intersección de las alturas de un triángulo obtusángulo</p> <ul style="list-style-type: none">■ <i>Actividad 2.1:</i> discriminar las alturas de un triángulo obtusángulo.■ <i>Actividad 2.2:</i> discriminar el ortocentro de un triángulo obtusángulo. <p><i>Tercer momento de aplicación:</i> Ubicar el punto de intersección de las alturas de un triángulo rectángulo</p> <ul style="list-style-type: none">■ <i>Actividad 3.1:</i> discriminación de las alturas de un triángulo rectángulo.■ <i>Actividad 3.2:</i> discriminar el ortocentro de un triángulo rectángulo. <p><i>Cuarto momento de aplicación:</i> Verificar los conocimientos sobre las alturas y el ortocentro.</p> <ul style="list-style-type: none">■ <i>Actividad 4.1:</i> distinguir la ubicación del ortocentro.■ <i>Actividad 4.2:</i> discriminar, el procedimiento de encontrar el ortocentro

Fuente: propia

Una vez diseñada la SEA se proyectó el lugar idóneo para su aplicación: la Institución Educativa Municipal Francisco de la Villota (zona rural del municipio de Pasto, Colombia) donde se desarrollan proyectos para brindar apoyo a estudiantes del programa de inclusión educativa⁵. El grado tercero de educación básica⁶ fue el nivel educativo considerado para aplicar la SEA (31 estudiantes con edades entre ocho y nueve años, uno con DEA).

Posteriormente, los EMF se apropiaron del informe de valoración psicopedagógico del estudiante con DEA (redactado por la gestora de inclusión de la Institución educativa). De esta manera, se identificó que la participación en clase es la principal fuente de dificultad del estudiante con DEA: dificultad en la adquisición y manejo de la lectura, la escritura y las matemáticas además de no establecer relaciones socio afectivas, falta de atención y concentración, bajo tono y velocidad en su lenguaje y dificultad en la memoria auditiva sobre todo cuando debe seguir instrucciones. Fue sobre esta cuestión que los EMF centraron toda su atención a nivel inclusivo (en adelante inclusión participativa).

En lo que sigue, los EMF diseñaron e incluyeron estrategias en la SEA para favorecer y valorar la inclusión del estudiante con DEA. Finalmente, la SEA fue aplicada por una de las binas de trabajo (seleccionada al azar: EMF₁), su ejecución se hizo de forma virtual, lo anterior por la situación de pandemia (COVID 19) que se vivió en el país en las fechas donde fue aplicada la SEA.

En todo el proceso de diseño de las estrategias mencionadas se favoreció la discusión, el consenso y el trabajo grupal: los EMF se organizaron en binas, diseñaron las estrategias solicitadas, los diseños fueron expuestos al grueso del grupo, se establecieron posibilidades y limitantes, en consenso, se seleccionaron, las estrategias más potentes. Lo anterior permitió asumir como unidades de análisis las consignas de las actividades propuestas en la SEA y como instrumentos de recolección de datos los grupos focales y las entrevistas semiestructuradas.

3. Constitución del instrumento metodológico

Para la discriminación de las categorías de análisis que se exponen en los párrafos posteriores se consideró un método mixto: algunos elementos de ciertas categorías fueron extraídos de investigaciones previas, los demás fueron considerados directamente del accionar de los EMF que diseñaron la SEA (Marmolejo, 2021; Marmolejo y Mosquera, 2021). Un total de cinco categorías de análisis fueron consideradas: posición del ortocentro en relación a la superficie del triángulo, tipos de cambio dimensional, tipos de tareas, estrategias de enseñanza inclusiva e indicadores de idoneidad inclusivos. Las tres primeras aluden al papel que desempeñó la visualización en el estudio del ortocentro, las dos restantes contemplan tanto las estrategias de enseñanza que buscan favorecer la inclusión participativa del estudiante con DEA como la valoración del efecto de su aplicación.

Para la constitución del instrumento metodológico se consideró tres fases, en la primera se discriminó las categorías visuales y las formas como tienden a ser desplegadas (descriptores), en la segunda fase, por su parte, fue objeto de atención el establecimiento de las categorías y descriptores asociados a lo inclusivo. Finalmente, en la tercera fase, se validó las categorías y descriptores reseñados por evaluadores externos. En lo que sigue describimos el proceso

⁵El programa de inclusión desarrolla una pedagogía centrada en el alumno/a y capaz de dar respuesta a las necesidades individuales de todos los niños/as, incluidos aquellos que presentan una discapacidad con el fin de garantizar una educación inclusiva. En este programa interviene los padres de familia, la docente encargada del curso y coordinado por la psicóloga y la gestora de inclusión de la institución.

⁶Lugar donde el Ministerio de Educación Nacional colombiano sugiere la enseñanza del ortocentro.

realizado en cada una de las fases reseñadas:

Fase 1: discriminación de categorías y descriptores visuales: se realizó un trabajo de apropiación conceptual sobre el papel que desempeña la visualización en el estudio de la geometría (Duval, 2004, 2017). La atención recayó en la comprensión de los conceptos de variable visual (Lemonidis, 1991) y deconstrucción dimensional de formas (Duval, 2004). A continuación, se identificó las actividades de la SEA donde se precisa considerar variables visuales o aplicar cambios dimensionales. Se utilizó el AGD Cabri II Plus para recrear los procesos que debían ser realizados para cumplir con las exigencias de las consignas de las actividades seleccionadas, lo cual permitió, en primera instancia, analizar la ubicación del ortocentro en los tipos de triángulos considerados, así como la naturaleza y ubicación del punto de corte de las alturas trazadas. Esto llevó a identificar tres variables visuales: la posición del ortocentro es externa o interna a la superficie del triángulo o se ubica en su contorno. De esta manera, se determinó la primera categoría de análisis y sus descriptores.

En cuanto a los tipos de deconstrucción dimensional promovidos su identificación consideró como elementos de caracterización las *dimensiones involucradas* (*dimensión 0, dimensión 1 o dimensión 2*), el *paso dimensional* y los *elementos constituyentes* de los triángulos (vértices, lados, alturas, ángulos, superficie del triángulo, intersección de las alturas). La articulación de las formas como aparecieron las tres cuestiones reseñadas suscitó un total de 15 tipos de cambio dimensional, estos se agruparon tres clases: *Neutro, Diminutivo y Aumentativo*. Este fue el proceso seguido para discriminar y establecer los descriptores de la segunda de las categorías de análisis. Todo el proceso anterior también permitió identificar dos tipos de tareas, por un lado, aquellas donde se solicitaba el reconocimiento, la discriminación o la modificación de configuraciones geométricas, por otro lado, aquellas donde se precisaba procesos de restauración de figuras. Con esto se definió la tercera de las categorías de análisis.

Fase 2: establecimiento de categorías inclusivas: los referentes que el MEN establece para promover la inclusión en las instituciones educativas colombianas (Decreto 1421 de 2017 y la Ley 1346 de 2009) junto a los indicadores de idoneidad didáctica (Godino, 2013) fueron los elementos que permitieron definir las dos categorías de análisis restantes. Igual que en la fase de diseño previa, en esta se identificó las actividades de la SEA donde se incluían estrategias para suscitar la participación del estudiante con DEA (*estrategias de enseñanza inclusiva visual-participativa*). En este sentido, se observó la consideración de tres aspectos, a saber: habla, escucha y afectividad. Se evidenció en el habla, estrategias para favorecer la lectura interactiva y dialógica, la utilización de palabras nuevas y la narración; en la escucha, las estrategias favorecidas fueron observación, asociación visual y repetición; en cuanto a la afectividad, se evidenció como estrategias la información personal, la atención emocional, las pausas activas y la empatía.

Una vez logrado lo anterior, se solicitó a los EMF definir indicadores que permitieran valorar el posible efecto de las estrategias de enseñanza inclusivas. En este sentido, se definió la última de las categorías del instrumento metodológico (*indicadores de idoneidad inclusiva visual-participativa*): los indicadores detectados pudieron ser agrupados en las tres cuestiones en que se dividieron las estrategias inclusivas. Así, como indicadores inclusivos se detectaron uno para evaluar el habla, dos para la escucha y uno para la afectividad.

Fase 3: validación del instrumento metodológico: para validar el instrumento metodológico y establecer su grado de confiabilidad se adoptó el proceso seguido en Marmolejo y Mosquera (2021) y Marmolejo (2021). En este sentido, se solicitó a tres pares externos (validadores) evaluar la definición, pertinencia, coherencia, cohesión y forma de aplicación de las categorías y sub-categorías de análisis reseñadas, así como sus descriptores. Los validadores fueron investigadores especializados en el campo de la educación matemática que

habían realizado investigaciones sobre cuestiones asociadas a la visualización o la inclusión o la formación docente.

El proceso de validación se realizó en cuatro momentos (Ver Tabla 2)

Tabla 2: Validación del instrumento metodológico

- Los validadores fueron informados sobre el problema analizado y la forma como fue desarrollada la investigación, se les presentó de forma escrita y de forma virtual las categorías y subcategorías de análisis propuestas: definiciones, descriptores y ejemplos de los descriptores. Una vez hecho lo anterior, se procedió a explicar cuál era el papel que debían realizar en cuanto a la validación y al establecimiento del grado de confiabilidad del instrumento metodológico.
- Los investigadores se reunieron de forma virtual con los validadores. En esta ocasión, los validadores describieron y justificaron oportunidades de mejora identificadas en el instrumento, en su mayoría relacionadas con falencias gramaticales y de pertinencia de los ejemplos propuestos. En cuanto, al número, nombre, tipo de categorías, subcategorías y descriptores, no hicieron alusión alguna.
- Los investigadores incluyeron en el instrumento metodológico la totalidad de oportunidades de mejora aludidas.
- Una nueva versión del instrumento metodológico fue entregada a los validadores junto a una unidad de análisis, seleccionada al azar. En esta ocasión, se solicitó a los validadores, en conjunto, codificar la unidad de análisis. Los investigadores procedieron de forma similar. Las codificaciones resultantes fueron puestas en comparación: un 90

Fuente: propia

4. Instrumento metodológico: categorías y descriptores

En lo que sigue se definen y se ejemplifican las categorías que conforman el instrumento metodológico reseñado en el apartado previo. Como se aludió previamente, las tres primeras consideran la actividad cognitiva de visualización; la cuarta, las estrategias de enseñanza contempladas para favorecer la inclusión visual-participativa del estudiante con DEA; y la última para evaluar el efecto de tales estrategias. En la Tabla ?? se presentan, sintética y esquemáticamente, las categorías de análisis, así como los elementos que les caracterizan.

4.1. Categoría 1: posición del ortocentro en relación a la superficie del triángulo

Un elemento significativo de la representación del ortocentro de un triángulo es su posición en relación a la superficie del triángulo. En este sentido, La investigación permitió identificar visualmente tres posiciones del ortocentro en relación a la superficie del triángulo.

- *Interno a la figura:* el ortocentro está ubicado en el interior del contorno del triángulo.

Categoría	Descriptor
Posición del ortocentro en relación a la superficie del triángulo	Interno al triángulo, externo al triángulo y límite del triángulo
Cambio dimensional	Diminutivo, aumentativo y neutro
Tareas visuales	Discriminación visual y restauración visual
Estrategias de enseñanza inclusivas que favorecen la participación a través de la explicitación de acciones visuales	Para favorecer el habla, la escucha y la afectividad a través de la explicitación de procesos visuales
Indicadores de idoneidad inclusiva que evalúan el efecto esperado de las estrategias inclusivas	Habla, Escucha y Afectividad

Fuente: Propia

Tabla 3: Categorías y descriptores del instrumento metodológico

Esta característica visual está presente en los triángulos acutángulos equiláteros, en los triángulos acutángulos isósceles y en los triángulos acutángulos escalenos.

- *Externo a la figura:* el ortocentro está ubicado en el exterior del contorno del triángulo. Esta característica visual está presente en triángulos obtusángulos isósceles y triángulos obtusángulos escalenos.
- *En el límite de la figura:* en este caso el ortocentro coincide con uno de los puntos que constituyen el contorno de la superficie del triángulo. Puntualmente, en uno de los vértices del triángulo. Igual que sucede en las dos variables visuales anteriores, la variable visual Límite está presente en más de un tipo de triángulos. Es el caso, de los triángulos rectángulos escalenos y los triángulos rectángulos isósceles.

4.2. Categoría 2: cambio dimensional

El cambio dimensional en la forma de ver las figuras bidimensionales es una operación básica para el desarrollo y comprensión de tareas matemáticas (Marmolejo, 2018). Plantea el acto de descomponer una figura (dimensión 2) en unidades figurales de dimensión inferior (dimensiones 0 y 1).

En este orden de ideas, se asume que una figura representa una situación geométrica únicamente en la medida en que la significación de ciertas unidades figurales y de algunas de sus relaciones estén explícitamente fijadas inicialmente (Duval, 2017). Lo anterior impone una forma de visualización espontánea: la visualización sobre las figuras tiende a privilegiar la discriminación de unidades bidimensionales sobre unidades de 1 o 0 dimensión. Es decir, que sobre una figura se reconoce, en primera instancia, una forma de esa misma dimensión (triángulos, cuadrados, pentágonos, etc.), y sólo, en segundo lugar, se pasa a discriminar, entre otros, tanto sus lados, diagonales, alturas, medianas y bisectrices, como los vértices y los puntos notables (circuncentro, baricentro, ortocentro, incentro, etc.) (Marmolejo, 2018).

Para determinar los cambios dimensionales promovidos en la investigación se consideró tanto las unidades constituyentes como los pasos dimensionales contemplados. Mientras que en el

primer caso se alude a las unidades constituyentes (Duval, 2017) del triángulo, en el segundo caso se contempla el cambio de focalización aplicado al pasar de focalizar la atención de una unidad significativa del triángulo a otra. La articulación de estas dos subcategorías permitió identificar tres cambios dimensionales: Neutro, diminutivo y aumentativo. En lo que sigue se definen estos descriptores y se establecen la variedad de formas en las que aparecen:

- *Cambio dimensional neutro*: se presenta cuando la resolución o comprensión de la tarea requiere aplicar un paso dimensional que suscite paso de focalización de una unidad figural a otra, ambas de igual dimensión. La investigación evidenció que el cambio dimensional neutro aparece de cinco formas distinta (Ver Tabla 4).

Tabla 4: Formas en que aparece el descriptor cambio dimensional neutro

Cambio dimensional neutro	Características	
	Unidades significantes	Paso dimensional
Neutro-Bidimensional	(Plano, triángulo)	(2D, 2D)
Neutro-unidimensional (altura-lado)	(altura, lado)	(1D,1D)
Neutro-unidimensional (lado)	(lado, lado)	(1D, 1D)
Neutro-Unidimensional (altura)	(altura, altura)	(1D, 1D)
Neutro-cero dimensional	(ortocentro, vértice)	(0D, 0D)

Fuente: Propia

- *Cambio dimensional diminutivo*: presente cuando la exploración de la tarea requiere la aplicación de un paso dimensional que suscite pasar de focalizar la atención en una unidad figural de dimensión n a otra unidad figural de dimensión inferior. El cambio dimensional diminutivo aparece de cinco formas distintas (Ver Tabla 5).

Tabla 5: Formas en que aparece el descriptor cambio dimensional Diminutivo

Cambio dimensional Diminutivo	Características	
	Unidades significantes	Paso dimensional
Diminutivo-unidimensional, cero dimensional (altura, vértice)	(altura, vértice)	(1D, 0D)
Diminutivo-unidimensional, cero dimensional (alturas, ortocentro)	(alturas, ortocentro)	(1D, 0D)
Diminutivo-Bidimensional, cero dimensional (triángulo, ortocentro)	(triángulo, ortocentro)	(2D, 0D)
Diminutivo-Bidimensional, unidimensional (triángulo, alturas)	(triángulo, alturas)	(2D, 1D)
Diminutivo-Bidimensional, cero dimensional (triángulo, vértice)	(triángulo, vértice)	(2D, 0D)

Fuente: Propia

- *Cambio dimensional aumentativo*: aparece cuando la comprensión o resolución de la tarea requiere aplicar un paso dimensional que favorezca pasar de focalizar la atención de una unidad figural de dimensión n a otra unidad figural de dimensión superior. Este cambio dimensional también aparece de cinco formas distintas (Ver Tabla 6).

Tabla 6: Formas en que aparece el descriptor cambio dimensional aumentativo

Cambio dimensional aumentativo	Características	
	Unidades significantes	Paso dimensional
Aumentativo-unidimensional, bidimensional (altura, ángulo)	(altura, ángulo)	(1D, 2D)
Aumentativo-unidimensional, bidimensional (lado, triángulo)	(lado, triángulo)	(1D, 2D)
Aumentativo-unidimensional, bidimensional (alturas, triángulo)	(alturas, triángulo)	(1D, 2D)
Aumentativo-unidimensional, cero dimensional (vértice, lado)	(vértice, lado)	(0D, 1D)
Aumentativo-unidimensional, cero dimensional (vértice, altura)	(vértice, altura)	(0D, 1D)

Fuente: Propia

4.3. Categoría 3: tareas visuales

Esta categoría alude a las acciones que se deben realizar para comprender o desarrollar las actividades de la SEA. Se considera la información expresada en los enunciados dados en lengua natural (afirmaciones, premisas y cuestiones a realizar o comprender) y en las acciones

visuales a considerar sobre las figuras que los acompañan. En este sentido, la investigación evidenció dos tipos de tareas:

Tareas de discriminación visual: suscitan la consideración de acciones visuales que promueven la discriminación de unidades constitutivas figúrales (y relaciones entre ellas), variables visuales o cambios dimensionales. A manera de ejemplo, en la Tabla 7 se expone una consigna junto con una figura, que permiten identificar este tipo de tareas, puesto que, en ella se requiere visualizar dos triángulos RPQ y HFT, pues una parte de la superficie del triángulo RPQ está contenida en el triángulo HFT. Esta acción permite distinguir los lados correspondientes a cada triángulo y discriminar el paso dimensional lado-triángulo (1D, 2D), además se requiere visualizar los trazos de las alturas y vértices de los triángulos, logrando discriminar las unidades constitutivas (triángulo, lados, vértices, punto de intersección y alturas).

Tabla 7: ejemplo de una tarea de discriminación visual

Actividad 1.2: discriminación del ortocentro de un triángulo acutángulo.

Consigna: ¿A qué triángulo pertenecen las alturas trazadas? ¿porque?

Fuente: Propia

Tareas de restauración: caracterizadas por incluir acciones sobre figuras deterioradas. Duval (2003) señala que las figuras deterioradas pueden ser representaciones icónicas (una figura representando una casa) o no icónicas (objetos básicos en la enseñanza de la Geometría: triángulos, rectángulos...) o bien representaciones ensambladas de diversas formas (Marmolejo, Prada e Insuasty, 2020).

Las tareas de restauración obligan a realizar operaciones como observar una figura fuera de su marco de referencia, prolongar la recta soporte de los segmentos, reorganizar una figura dada y discriminar en una figura, otra, u otras configuraciones (Marmolejo Prada e Insuasty, 2020). En dichos casos, es necesario con ayuda de un instrumento prolongar los segmentos fragmentarios ya trazados para hacer “aparecer” los puntos de intersección ausentes, y luego recurrir a ellos para discriminar nuevas rectas (Duval, 2004).

La Tabla 8 ejemplifica una tarea de restauración, la característica de la consigna permite,

observar la altura p y buscar el lado perpendicular del triángulo, reconociendo las prolongaciones de los lados del triángulo, esta acción logra visualizar que el trazo de la altura p no está completamente trazado y al completar el trazo aparece el punto de intersección de las tres alturas, por lo tanto, la restauración fue de las alturas y finalmente, se concluye que es necesario que el estudiante, primero focalicé la atención en los lados y vértices del triángulo y seguidamente con ayuda de una regla, completé los trazos faltantes.

Tabla 8: Ejemplo de una tarea de restauración

Actividad 2.2: discriminar el ortocentro de un triángulo obtusángulo.

Consigna: ¿La altura p a qué lado del triángulo SWU es perpendicular y por qué vértice pasa? Complete el trazo de la altura.

Fuente: Propia

4.4. Categoría 4: estrategias de enseñanza inclusivas que favorecen la participación a través de la explicitación de acciones visuales

“Las estrategias de enseñanza son medios o recursos para prestar ayuda pedagógica con el objeto de promover el aprendizaje” (Díaz-Barriga y Hernández, 2010, p.141), son inclusivas porque tienen en cuenta las características específicas del estudiante y están enfocadas en suscitar la participación a través de la explicitación de acciones que movilizan la discriminación de variables visuales y de cambios dimensionales asociados al estudio del ortocentro.

Los aspectos que se tuvieron en cuenta para estas subcategorías fueron. Para identificar las estrategias de enseñanza inclusivas visual-participativas se contempló las características generales del estudiante con DEA, la intencionalidad a lograr con la aplicación de la SEA y las actividades cognitivas y pedagógicas a realizar. Tres descriptores conforman esta categoría: el habla, la escucha y la afectividad. Las dos primeras permiten el reconocimiento, la escucha y la toma de decisiones, mientras que la tercera centra su atención en el ambiente afectivo y de confianza considerado para favorecer la autoestima, la motivación y la empatía. A continuación, se definen los tres descriptores reseñados:

Estrategias de enseñanza inclusivas que favorecen el habla a través de la explicitación de procesos visuales: herramientas que se utilizan para promover el desarrollo de la expresión oral de los estudiantes. El habla es una habilidad básica para promover el desarrollo de un individuo, alude a comunicarse con claridad, fluidez y coherencia, también considera el

acto de ser escuchado (Avila, 2019). El desarrollo de esta habilidad exige la participación en situaciones comunicativas reales (Palacios, 2013). Son ejemplos de este tipo de estrategia la lectura interactiva y dialógica, la inclusión de palabras nuevas y la explicitación de narraciones, mientras que, en el primer caso, permiten interactuar mediante el habla promoviendo el dialogo a través del planteamiento de preguntas abiertas, de la explicitación de comentarios, sugerencias y argumentos que describen, explican o justifican acciones visuales y determinan sus efectos (Millán, 2013); en el segundo caso, fomentan el desarrollo del lenguaje suscitando la puesta en escena de vocabulario nuevo asociado al estudio del ortocentro desde una perspectiva visual, su uso potencializa el desarrollo del aprendizaje significativo (Millán, 2013). Las narraciones, por su parte, posibilitan la explicitación de descripciones detalladas (Vernon y Alvarado, 2014) donde se alude unidades figurales constituyentes, a su articulación y a los procesos visuales realizados.

Estrategias de enseñanza inclusivas que favorecen la escucha a través de la explicitación de procesos visuales: la escucha es una de las competencias comunicativas decisivas para lograr aprendizajes significativos, formación democrática y construcción de ciudadanía (Largacha, 2007). Estas estrategias son las herramientas que permiten que el estudiante, esté atento y proceda a preguntar en el desarrollo de la SEA. Este tipo de estrategias fortalecen de forma eficaz y atractiva la habilidad de la escucha, promueven relaciones interpersonales, mejores desempeños y un mayor nivel de participación (Casas y Farías, 2017), asimismo, permiten la aceptación del otro en un ambiente de inclusión (Araque y Quintero, 2018). La observación activa del comportamiento del estudiante con DEA, la asociación de aspectos visuales registrados en representaciones analógicas (tablas, esquemas, etc.) y la repetición de información relevante para la comprensión del papel que desempeña la visualización en el estudio del ortocentro.

Estrategias de enseñanza inclusivas que favorecen la afectividad a través de la explicitación de procesos visuales: estas estrategias se consideran teniendo en cuenta el contexto emocional del estudiante, sus actitudes, motivaciones, valores y factores que se explicitan en el desarrollo de actividades donde la visualización guía el estudio del ortocentro. En palabras de Rosas (2007), las estrategias afectivas influyen directamente en el proceso de aprendizaje, permiten, discutir pociões contradictorias sin afectar las buenas relaciones entre iguales y promueven ajustes emocionales. En breve, ayudan a la formación integral de cada individuo, la aceptación de diferencias y la empatía.

4.5. Categoría 5: indicadores de idoneidad inclusiva que evalúan el efecto esperado de las estrategias inclusivas que pretenden favorecer la participación a través de la explicitación de acciones visuales

Evidencia la efectividad de la aplicación de las estrategias de enseñanza que buscan favorecer la inclusión participativa del estudiante con DEA a través del estudio del ortocentro mediado por la aplicación de procesos visuales. Herramientas de esta naturaleza sirven de pauta o guía para el diseño y valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: ayudan a reflexionar y valorar la práctica pedagógica (Godino, 2013).

La investigación evidenció la presencia de indicadores de esta naturaleza en tres frentes acordes a los descriptores de las estrategias de enseñanza inclusiva visual -participativa descritas en el apartado anterior, A nivel del habla, el indicador fue “el estudiante con DEA describe, explica, justifica y argumenta sus inquietudes, procedimientos y respuestas sobre el papel que desempeñan las variables visuales y los cambios dimensionales en el estudio del orto-

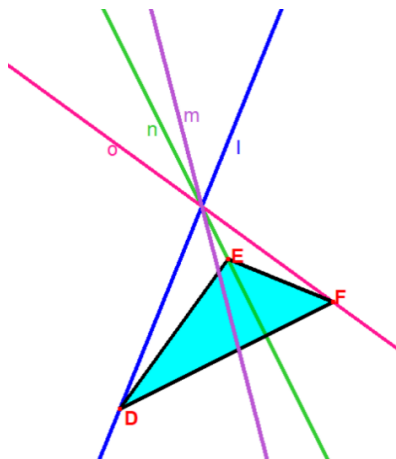
centro. Lo hace de forma libre, respetuosa y precisa”. En cuanto a la escucha, se detectaron los indicadores: “el estudiante con DEA se mantiene atento y motivado, evidencia disposición positiva en el desarrollo o comprensión de actividades donde las variables visuales y los cambios dimensionales intervienen para suscitar el estudio del ortocentro”, y “el estudiante con DEA reconoce, sistematiza y transforma información asociada al papel que desempeñan las variables visuales y los cambios dimensionales involucrados en el desarrollo o comprensión de las actividades que suscitan el estudio del ortocentro”. En torno a la afectividad, el indicador identificado fue “el estudiante con DEA expresa sus emociones y sentimientos de forma libre y espontánea, evidencia autoestima, evita el rechazo, la fobia o el miedo al participar en el desarrollo o comprensión de actividades donde las variables visuales y los cambios dimensionales intervienen para suscitar el estudio del ortocentro”.

5. Ejemplo de codificación de una unidad de análisis

Este apartado ejemplifica la aplicación del instrumento metodológico definido en el artículo. Para hacerlo, se seleccionó de forma arbitraria una de las consignas propuesta en la SEA y su proceso de aplicación, ver Tabla 9. En la Tabla 10, por su parte, se expone la codificación que arroja la aplicación del instrumento metodológico en la consigna reseñada.

Tabla 9: Consigna y su proceso de aplicación

Consigna: ¿Cuáles de las líneas rectas que atraviesan al triángulo EDF representan sus alturas?



Proceso de aplicación de la consigna:

EMF₁: observa el triángulo DEF

EMF₁: ahora la tarea consiste en que debes identificar cuáles de las líneas trazadas corresponden a las alturas del triángulo.

DEA: ¿la línea rosada, la verde, la morada y la azul? ¿Cómo identifico si es altura?

EMF₁: recuerda la definición de altura

EMF₁: con tus palabras descríbeme como debo trazar una altura

DEA: primero debo ver que la altura pase por un vértice del triángulo y por un lado del triángulo.

EMF₁: eso vas bien, continúa recordando ... ¿qué pasa con la altura y el lado? ¿Qué se debe cumplir más par que sea altura?

DEA: uhhmm... debo utilizar la escuadra y ver donde se forma el ángulo recto como hice en el triángulo amarillo (señala con la escuadra donde hay ángulos rectos)

EMF₁: muy bien, mira que las líneas rectas que forman ese ángulo recto son pediculares

DEA: ha si... ¡profe la línea verde es una altura! (señala la línea recta n)

EMF₁: ¿por qué?

DEA: profé mire, que pasa por este punto (señala el vértice E) y también pasa por este lado (señala el lado DF del triángulo) ... profé mire que aquí hay un ángulo recto (coloca la escuadra en la intersección del lado DF y la altura n)

EMF₁: si está bien, ¡lo lograste! procede igual con las otras líneas rectas

DEA: profé mire que la línea morada no pasa por un punto del triángulo (señala la línea recta m y con su dedo muestra el trazo) entonces ¿esta no es altura?

EMF₁: efectivamente m no es una altura, pero justifícame porque no lo es

DEA: pues... profé debe pasar por un punto del triángulo para ser altura y esta no pasa por ninguno (señala los tres vértices del triángulo y la línea recta m)

EMF₁: eso ¡muy bien! Ahora continua con las demás

DEA: profé la línea azul pasa por este punto (señala el vértice D) pero no sé dónde está el ángulo recto

EMF₁: pensemos como se encontraría el lado que necesitamos, tu qué piensas o recuerdas

DEA: ¿sería hacer otra línea en el triángulo? o puedo hacer lo mismo que hicimos en el triángulo rosado

EMF₁: vas por muy bien camino, entonces recordando que lado o lados vas a prolongar

DEA: ¡prologare este lado y este lado! (con ayuda de una regla en la figura prolongo los lados DE y FE)

DEA: ahora ya lo miro, entonces la línea azul pasa por este lado (señala prolongación del lado FE) y la rosada por este (señala prolongación del lado DE)

EMF₁: correcto si miraste que prologando los lados se puede encontrar los lados opuestos, ahora falta que compruebes si son perpendiculares

DEA: ah ya el ángulo recto

EMF₁: si

DEA: mire profé que, si coloco la escuadra o con mis dedos aquí, formo el ángulo recto (señala la intersección de la altura l con el lado FE y la intersección de la altura o con el lado DE y verifica que la escuadra encaje) ...entonces la línea rosada y azul si son alturas

EMF₁: perfecto, el hacer las prolongaciones de los lados del triángulo te ayudo a verificar la perpendicularidad entre las alturas y los lados... ¡muy bien has logrado identificar las alturas del triángulo DEF ! Ahora si en resumen dime ¿cuáles son las alturas del triángulo?

DEA: profé la línea verde si es altura, la morada no y la azul y la rosada si son alturas...

Fuente: Propia

Tabla 10: Ejemplo de codificación de la consigna

Posición del ortocentro en relación a la superficie del triángulo: la discriminación visual del ortocentro de un triángulo podría constituirse en un recurso para determinar cuáles de las líneas rectas que se representan en una configuración geométrica donde está un triángulo, no es una de sus alturas: si una línea recta no se intercepta con el ortocentro, entonces, ésta no representa una altura del triángulo. No obstante, para responder a la cuestión planteada en la consigna, esta forma de actuar no es procedente, pues, las cuatro líneas rectas en cuestión se interceptan, todas en el mismo punto, el cual representa al ortocentro del triángulo DEF . En breve, la discriminación visual del ortocentro no es una variable a considerar en el desarrollo de la cuestión planteada en la consigna. Por tanto, su codificación no aplica.

Cambio dimensional: en un primer golpe de vista, la configuración representada en la consigna sugiere la presencia de cuatro líneas rectas (o, l, n y m) y un triángulo. Para discriminar que las líneas rectas l, o y n representan alturas del triángulo DEF , mientras que la línea recta m no, se precisa, en cada caso, aplicar tres cambios dimensionales, en su orden: **augmentativo, diminutivo y augmentativo**.

- Para l se precisa focalizar la atención en el lado EF , prolongarlo hasta que intercepte a l , luego focalizar la atención en el ángulo que se forma al interceptarse las dos líneas (EF y l). Por tanto, es necesario, pasar de focalizar la atención en l , a hacerlo en el triángulo DEF (como una Gestalt); el segundo, al pasar de centrar la atención en DEF a hacerlo en uno de sus lados: EF ; el tercero, al centrar el interés en el ángulo que se forma al interceptarse l y EF .
- Para la línea o , se procede de forma similar que en el caso anterior. Pero, en este, el lado a prolongar es DE .
- En cuanto a n , se exige pasar de centrar la atención en n a hacerlo en DEF como Gestalt, luego, pasar de focalizar perceptivamente a DEF a hacerlo en uno de sus lados: DF , y, finalmente, dejar de interesarse en DF y hacerlo en el ángulo que se constituye en la intercepción entre DF y n . En este caso, no se precisa prolongar ningún lado de DEF .
- Para evidenciar que m no representa ninguna altura del triángulo se precisa aplicar de forma conjunta los procesos seguidos para determinar que l y n representan alturas de DEF . El primer proceso, al verificar si m es o no una altura vinculada al lado EF , el segundo caso, cuando se evidencia lo anterior, pero para los lados ED y DF .

Tarea visual: el proceso reseñado en la codificación de la categoría anterior muestra que la tarea propuesta en la consigna es tanto de discriminación como de restauración. El primer tipo de tarea, al focalizar la atención en diferentes unidades constitutivas del triángulo DEF , también al pasar de focalizar la atención de las líneas rectas al triángulo DEF . El segundo tipo de tarea, por su parte, cuando se precisó prolongar algunos de los lados del triángulo DEF .

Estrategias de enseñanza inclusivas: tres estrategias fueron utilizadas por EMF_1 para suscitar la inclusión visual participativa del estudiante con DEA: narrar, asociación visual y atención emocional: El primer tipo de estrategia, cuando EMF_1 solicitó al estudiante describir el proceso del trazo de una altura; la segunda, al identificar ángulos rectos haciendo uso de la escuadra, en algunos casos recurriendo a deícticos (señalar con el dedo); la tercera, al suscitar espacios para que el estudiante con DEA expresé sus opiniones y formas de proceder.

Indicadores de idoneidad inclusivos: la aplicación de la consigna por parte de EMF₁ muestra que el estudiante recordó y pudo describir el trazo de una altura (Tabla 9), evidenciando en el proceso motivación y disposición positiva, también atención (preguntó frecuentemente, utilizó herramientas didácticas que le permitieron de forma espontánea identificar ángulos rectos y expresó confianza y respeto al responder las preguntas planteadas). Lo anterior muestra que los indicadores permitieron un gran aporte, dentro del desarrollo cognitivo del estudiante con DEA frente a los tres descriptores de las estrategias de enseñanza, mejorando las dificultades que se evidenciaron al estudiante con DEA, por parte de EMF₁

Codificación: Cambio dimensional:

Aumentativo, Diminutivo, Aumentativo.

Tipo de tarea visual:

Discriminación visual, Restauración

Estrategias de enseñanza inclusivas que favorecen la participación a través de la explicitación de acciones visuales:

Habla, escucha, afectividad.

Indicadores de idoneidad inclusiva que evalúan el efecto esperado de las estrategias inclusivas que pretenden favorecer la participación a través de la explicitación de acciones visuales participativa:

Favorecieron el desarrollo cognitivo del estudiante con DEA y su participación, frente a los tres descriptores de las estrategias de enseñanza.

Fuente: Propia

6. Conclusión

El Ministerio de Educación Nacional colombiano establece pautas para favorecer la inclusión en las instituciones educativas (Decreto 1421 de 2017 y la Ley 1346 de 2009). Es deber de los educadores en ejercicio diseñar y validar estrategias asertivas que favorezcan la inclusión en las instituciones educativas donde laboran. Para el caso de los educadores en formación, los programas de formación deben aprovisionarlos de espacios donde experimenten con estrategias encaminadas a suscitar la inclusión de poblaciones vulnerables específicas, asimismo, de espacios donde puedan evaluar el efecto de su aplicación. En el caso de la enseñanza de la geometría, se precisa articular tales elementos con el desarrollo de actividades cognitivas, pues, esta rama de la matemática exige la coordinación de las actividades cognitivas de visualización, razonamiento y construcción (Duval, 1998). El instrumento metodológico definido en este artículo, muestra que el diseño de las tareas, actividades y consignas constituyen espacios vitales para detectar cómo los educadores matemáticos en formación tienden a promover la inclusión a través del estudio de la geometría desde un enfoque visual. En este sentido, el instrumento reseñado desempeña una poderosa herramienta para los programas de formación para evaluar el asertividad de las decisiones de los educadores matemáticos en formación, en consecuencia, para detectar las dificultades y errores encontrados e intervenir sobre ellos, lo cual permitirá, sin lugar a dudas, potencializar la formación inclusiva de los futuros educadores matemáticos.

Referencias

- [1] Araque, L. C., y Quintero, C. A. (2018). Propuesta metodológica para el reforzamiento de la escucha, a partir de la implementación de juegos tradicionales en la clase de educación física, <https://hdl.handle.net/10901/15785>
- [2] Avila, S. D. P. (2019). Estrategias para el Desarrollo del Lenguaje Oral en los niños de Edad Preescolar, <http://repositorio.untumbes.edu.pe/handle/20.500.12874/1454>
- [3] Casas, A., y Farías, I. (2017). Caminos lúdicos para fortalecer la habilidad de la escucha en estudiantes de grado segundo, <http://hdl.handle.net/11371/1075>
- [4] Clements, D., Swaminathan S., Zeitler, M.A. y Sarama, J. (1999). Young children´s concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2). Pp. 192-212, <https://doi.org/10.2307/749610>
- [5] Decreto 1421 de 2017 (Ministerio de Educación Nacional). Por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. 29 de agosto de 2017, <https://www.suin-juriscol.gov.co/viewDocument.asp?ruta=Decretos/30033428>
- [6] Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2010). Estrategias de enseñanza para la promoción de aprendizajes significativos, *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo* 2 Ed, (141-266), <https://buo.mx/assets/diaz-barriga2C---estrategias-docentes-para-un-aprendizaje-significativo.pdf>
- [7] Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo, (2ª ed.). Colombia: Universidad del Valle Instituto de Educación y Pedagogía Grupo de Educación Matemática, <http://sintesis.univalle.edu.co/saladelectura/semiosis.html>
- [8] Duval, R. (2004). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et sciences cognitives*, 10, 5-53, <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ST/IST05010/IST05010.pdf>
- [9] Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. Mexico, 41-76.
- [10] Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 37-51, <https://cir.nii.ac.jp/crid/1570854175528192000>
- [11] Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 111-132, https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf
- [12] Guía de consulta de los criterios diagnósticos del DSM 5. Arlington, VA, Asociación Americana de Psiquiatría, 2013, <https://www.eafit.edu.co/ninos/reddelaspreguntas/Documents/dsm-v-guia-consulta-manual-diagnostico-estadistico-trastornos-mentales.pdf>
- [13] Hernández, S. R. y Torres, C. P. M. (2018). *Metodología de la investigación* (Vol. 4). México. F DF: McGraw-Hill Interamericana, <https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf>
- [14] Kordaki, M. (2003). The Effect of Tools of a Computer Microworld on Students' Strategies regarding the Concept of Conservation of Area. *Educational Studies in Mathematics*, 52(2), 177-209, <https://www.jstor.org/stable/3483175>
- [15] Largacha, E. E. (Marzo-Mayo de 2007). Escuchar, comprender y mejorar las relaciones. *Al tablero* (40), <https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-122245.html>

- [16] LEY 1346 DE 2009. Por medio de la cual se aprueba la “Convención sobre los Derechos de las personas con Discapacidad”. 31 de julio de 2009. No. 47.427, <https://www.mincit.gov.co/ministerio/ministerio-en-breve/docs/ley-1346-de-2009.asp?text=1a20Ley20134620de20junio,1320de20diciembre20de202006E2809D>.
- [17] Lemonidis, C. (1991). Analyses et réalisation d’une expérience d’enseignement de homothétie. En *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2-3), 295-324, https://www.researchgate.net/publication/247164250_Analyse_et_realisation_d'une_experience_d'enseignement_de_l'homothetie_Recherches_en_Didactique_des_Mathematiques_RDM_Vol_11_No23_pp_295-324_France
- [18] Marmolejo, G-A. (2021). Función de control visual en el tratamiento del área de superficies planas. Un estudio comparativo de libros de texto colombianos y españoles. En *Colección Permanente de Publicaciones Docentes de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Nariño* (1 edición). P. 121, <https://sired.udenar.edu.co/7323/1/CONVERSIC393N2C2OLECTURABILIDAD20ICONICA20Y20FUNCION20DE20CONTROL20VISUAL.pdf>
- [19] Marmolejo, G. A. (2018). ¿Cómo promueven el cambio dimensional los libros de texto colombianos en relación con el área de regiones poligonales?. *Eco Matemático*, 9(1), 15–22, <https://revistas.ufps.edu.co/index.php/ecomatematico/article/view/1640/2542>
- [20] Marmolejo G-A. y González, M-T. (2015a). Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. *Relime*, 18(3), 301-328, <https://www.redalyc.org/pdf/335/33543068002.pdf>
- [21] Marmolejo G-A. y González, M-T. (2015b). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión. *REIEC*, 10(1), 45-57, <https://www.redalyc.org/pdf/2733/273341286004.pdf>
- [22] Marmolejo G-A. y González, M-T. (2013a). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Revista Educación Matemática*, 25(3), 61-102, <https://core.ac.uk/reader/147430340>
- [23] Marmolejo G-A. y González, M-T. (2013b). Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. *Revista Integración*, 31(1), 87-106, <https://revistas.uis.edu.co/index.php/revistaintegracion/article/view/3386>
- [24] Marmolejo, G-A., Guzman, L.Y. e Insuasty, A.L. (2015). Introducción a las fracciones en textos escolares de educación básica ¿figuras representaciones estáticas o dinámicas? *Revista científica*, 23(1), 43-56, <https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/revcie/article/view/9260/11028>
- [25] Marmolejo, G. A y Mosquera, S. (2021). Razonamiento cuantitativo y demanda semiótico-cognitiva en las guías de orientación de las pruebas saber. *Editorial Universidad de Nariño*.
- [26] Marmolejo, G. A., Prada, R., e Insuasty, E. (2020). La visualización asociada a las figuras geométricas bidimensionales en el estudio de las matemáticas. Una revisión bibliográfica descriptiva entre 1981 y 2016. *Revista ESPACIOS. ISSN, 798*, 1015, <https://www.revistaespacios.com/a20v41n26/a20v41n26p25.pdf>
- [27] Marmolejo, G-A., Sánchez, N. y Londoño, S. (2017). Conocimiento visual de los educadores al promover el estudio de la relación perímetro-área. *REIEC*, 12(2), 18-28, <http://www.scielo.org.ar/pdf/reiec/v12n2/v12n2a02.pdf>
- [28] Marmolejo, G. A., y Vega Restrepo, M. B. (2012). La visualización en las figuras geométricas: Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación matemática*, 24(3), 7-32, <http://funes.uniandes.edu.co/13251/1/Marmolejo2012La.pdf>

- [29] Markovits, Z., Rosenfeld, S. y Eylon, B.S. (2006). Visual cognition: content knowledge and beliefs of preschool teachers. In Novotná, J. Moraová, H., Krátká, M. y Stehlíková, N.(Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 145-152
- [30] Mesquita, A. (1989). L'Influence de aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie. Disertación doctoral no publicada, Université de Strasbourg, Strasbourg, Francia.
- [31] Moriena, S. y Scaglia, S. (2003), Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la Geometría. *Educación Matemática*, 15 (1), 5-19, <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol15/vol15-1/vol15-1-1.pdf>
- [32] Millán, S. (2013). Fomento del bilingüismo en edades tempranas: propuesta basada en el enfoque CLIL para el segundo ciclo de Educación Infantil, https://digibuo.uniovi.es/dspace/bitstream/handle/10651/17823/TFM_Millan2013.pdf, https://digibuo.uniovi.es/dspace/bitstream/handle/10651/17823/TFM_Millan2013.pdf, https://digibuo.uniovi.es/dspace/bitstream/handle/10651/17823/TFM_Millan2013.pdf
- [33] Outhred, L. y Mitchelmore, M. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for research in mathematics education*, 31(2), pp. 168-190
- [34] Palacios, A. (2013). La Expresión Oral En El Desarrollo De Las Áreas Fundamentales De La Educación General Básica De Los Estudiantes De Quinto Año
- [35] Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational studies in mathematics*, 17, 297-311, <https://www.jstor.org/stable/3482230>
- [36] Rivera, F.D. y Becker, J.R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM. The international journal on mathematics education*. 40(1), pp 65-82, http://mathedseminar.pbworks.com/file/57814761/Rivera_cognitive20perception20of20generalization_2008.pdf
- [37] Rosas, E. Z. (2007). Las estrategias socio-afectivas y su efecto motivador en situaciones de aprendizaje de una lengua extranjera. *Paradigma*, 28(2), 181-196, <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/392>
- [38] Sánchez, E. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica. *Educación matemática*, 15, (2), 27-53, <https://www.redalyc.org/pdf/405/40515202.pdf>
- [39] Vernon, S. A., y Alvarado, M. (2014). Aprender a escuchar, aprender a hablar. La lengua oral en los primeros años de escolaridad, <https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D417.pdf>
- [40] Walcott, C., Mohr, D. y Kastberg, S. (2009). Making sense of shape: An analysis of children's written responses. *Journal of Mathematical Behavior*, 28, pp. 30-4, DOI: [10.1016/j.jmathb.2009.04.001](https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.04.001)