

GERMÁN MARCILLO. 2026. Análisis Comparativo de Mapeos Caóticos: Seno vs. Ecuación Logística. Revista Sigma, 22 (1). Páginas 1–14.

## REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

*Volumen XXII N.º 2 (2026), páginas 1–14*

*Universidad de Nariño*

# Análisis Comparativo de Mapeos Caóticos: Seno vs. Ecuación Logística

Germán Arturo Marcillo Hernández <sup>1</sup>

**Abstract:** This paper presents a comparative analysis of chaotic behavior in two fundamental one-dimensional dynamical maps: the sine map and the logistic map. The study employs bifurcation diagrams, Lyapunov exponent calculation, and a descriptive statistical analysis of their attractors' distribution to visualize and quantify the similarities and differences in their transitions to chaos and the structure of their attractors. The results confirm the expected characteristics in both systems, revealing the classic period-doubling cascade and the presence of strange attractors. It is highlighted that, while both exhibit chaos, the visual and statistical analysis reveals distinctive differences in the distribution and form of their chaotic attractors, such as the banded distribution for the logistic map and a denser occupation at the extremes for the sine map. These findings contribute to a better understanding of the universality and particularities of chaotic systems, serving as a basis for more advanced studies and practical applications.

**Keywords.** Dynamical maps, Chaos, Sine map, Logistic map, Chaotic attractors, Lyapunov exponent.

**Resumen:** Este documento presenta un análisis comparativo del comportamiento caótico en dos mapeos dinámicos unidimensionales fundamentales: el mapeo seno y el mapeo logístico. El estudio emplea diagramas de bifurcación, el cálculo del exponente de Lyapunov, y un análisis estadístico descriptivo de la distribución de sus atractores para visualizar y cuantificar las similitudes y diferencias en sus transiciones al caos y la estructura de sus atractores. Los resultados confirman las características esperadas en ambos sistemas, revelando la clásica cascada de duplicación de período y la presencia de atractores extraños. Se destaca que, si bien ambos exhiben caos, el análisis visual y estadístico pone de manifiesto diferencias distintivas en la distribución y forma de sus atractores caóticos, como la distribución en bandas para el mapeo logístico y una ocupación más densa en los extremos para el mapeo seno. Estos hallazgos contribuyen a una mejor comprensión de la universalidad y particularidades de los sistemas caóticos, sirviendo como base para estudios más avanzados y aplicaciones prácticas.

**Palabras Clave.** Mapeos dinámicos, Caos, Mapeo seno, Mapeo logístico, Atractores caóticos, Exponente de Lyapunov

---

<sup>1</sup>Msc. Matemática Aplicada, Universidad Nacional de Colombia. Profesor hora cátedra (asociado) Universidad de Nariño. Correo: [gmarcilloh@udenar.edu.co](mailto:gmarcilloh@udenar.edu.co).

## 1. Introducción

El estudio de los sistemas que evolucionan en el tiempo, conocidos como sistemas dinámicos, tiene sus raíces en las teorías clásicas del determinismo de Galileo y Newton en el siglo XVII. Sin embargo, fue el matemático francés Henri Poincaré (finales del siglo XIX - principios del siglo XX) quien, con sus trabajos sobre la sensibilidad a las condiciones iniciales en sistemas de tres cuerpos, sentó las bases de la teoría moderna de los sistemas dinámicos y, de forma precursora, las primeras afirmaciones sobre comportamientos complejos como el caos. Poincaré descubrió que pequeños cambios en las condiciones iniciales de un sistema que evoluciona podían producir enormes diferencias en los fenómenos finales ([Schifter(2024)]).

Con la invención de los ordenadores, el matemático y meteorólogo Edward Lorenz, en 1963, al tratar de modelar el complejo movimiento de la atmósfera, generó una gráfica especial conocida como el **atractor de Lorenz**, marcando el nacimiento de la Teoría del Caos ([Gleick(2008)]). A pesar de que por un tiempo los resultados de Lorenz pasaron desapercibidos por la comunidad científica, la década de 1970 representó el auge de la Teoría del Caos. En este periodo se destacan los aportes de [Li and Yorke(1975)] por establecer las primeras definiciones matemáticas de caos en sistemas dinámicos discretos; [May(1976)] con su contribución fundamental, que a su vez representa la motivación de este artículo, al estudiar la ecuación logística como un modelo simple que, mediante un proceso recurrente, exhibe el paso de lo ordenado al caos y viceversa; y [Feigenbaum(1978)] quien introdujo la constante de Feigenbaum ( $\delta$ ) y la universalidad de la cascada de duplicación de período en mapas unimodales. Desde entonces, la Teoría del Caos es un campo de gran interés para la comunidad científica.

Los mapeos dinámicos unidimensionales constituyen herramientas fundamentales para el estudio de sistemas no lineales y el fenómeno del caos. La ecuación logística, en particular, se erige como un ejemplo clásico que ha facilitado la comprensión de conceptos cruciales como las cascadas de duplicación de período, los exponentes de Lyapunov y la universalidad de Feigenbaum ([Abarbanel(1996)]). No obstante, la exploración de otras funciones, como el mapeo basado en la función seno, ofrece una valiosa oportunidad para observar cómo estas propiedades se manifiestan en sistemas con características matemáticas diferentes.

Si bien la ecuación logística y el mapeo seno puro han sido profundamente estudiados por sus ricas dinámicas caóticas [May(1976), Lalescu(2010)], las exigencias crecientes de aplicaciones en campos como la criptografía y la optimización numérica han impulsado el desarrollo de sistemas caóticos más robustos. Esto ha llevado a la creación de mapeos híbridos o modificados que buscan potenciar las propiedades caóticas inherentes, tales como una mayor sensibilidad a las condiciones iniciales, rangos caóticos más amplios y distribuciones estadísticas mejoradas. Ejemplos recientes incluyen el uso de modelos de caotificación basados en la función seno para amplificar el caos en mapas existentes ([Hua et al.(2019)Hua, Zhou, and Zhou]), el desarrollo de mapas híbridos como el logístico-seno para métodos de optimización ([Demir et al.(2020)Demir, Tuncer, and Kocamaz]), y la creación de nuevos mapas unidimensionales potenciados por seno para esquemas avanzados de encriptación de imágenes ([Mansouri and Wang(2020)]). Estos avances resaltan la importancia de comprender a fondo las propiedades dinámicas y estadísticas de los mapeos unidimensionales fundamentales, como los analizados en este trabajo.

Este documento presenta un análisis descriptivo y comparativo del mapeo seno y la ecuación logística. Si bien se proporcionan los fundamentos necesarios, el enfoque principal no radica en las profundidades de la teoría matemática o en los algoritmos de implementación detallados, sino en los resultados y su interpretación. El objetivo primordial es motivar al lector, especialmente a aquellos menos familiarizados con el tema, y despertar la curiosidad

por estos sistemas de naturaleza determinística que poseen la capacidad de evolucionar hacia comportamientos caóticos. El análisis se estructurará alrededor de los siguientes puntos clave:

- La generación de diagramas de bifurcación.
- El cálculo del exponente de Lyapunov como medida cuantitativa del caos.
- El análisis espectral (espectrogramas) para identificar la presencia de frecuencias discretas o continuas.
- El análisis estadístico (histogramas y momentos) para caracterizar la distribución de los atractores.

La implementación computacional que genera los mapeos de bifurcación, los gráficos del exponente de Lyapunov, los espectrogramas e histogramas, se hacen desde Python versión 3.13, el código completo se puede revisar desde la plataforma personal de [GitHub](https://github.com/Germarcillo/Codigo_MapeoSeno.git) o ir al siguiente url: [https://github.com/Germarcillo/Codigo\\_MapeoSeno.git](https://github.com/Germarcillo/Codigo_MapeoSeno.git).

## 2. Mapeos en Estudio

Se analizarán dos mapeos recursivos, dadas por las funciones unidimensionales dependientes de un sólo parámetro de control  $R$ , la función seno:

$$f(x) = \sin(R \cdot x)$$

donde,  $R \in [0, 10]$  y  $x = x_0$  tomará un valor inicial fijo en el intervalo  $[0, 1]$  de manera que la función se iterará a partir de este valor fijo generando la trayectoria o mapeo de bifurcación  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  según el proceso:

$$x_{n+1} = f(x_n, R) = \sin(R \cdot x_n)$$

De manera similar para la ecuación logística:

$$f(x) = Rx(1 - x)$$

donde,  $R \in [0, 4]$  con el mismo valor inicial  $x = x_0$ , generando el mapeo logístico según el proceso

$$x_{n+1} = f(x_n, R) = Rx_n(1 - x_n)$$

Es importante aclarar que el intervalo para el parámetro de control  $R$  no es el mismo para cada función, debido a que en el proceso iterativo la ecuación logística diverge rápidamente a  $-\infty$ , entonces el sistema no tendrá atractores, los cuales se clasifican en atractores de punto fijo, de ciclo límite o extraño (caótico) (Strogatz et al, 2018)

## 3. Metodología de Análisis

El análisis descriptivo y comparativo de los mapeos de las dos funciones mediante el proceso recursivo, se soporta en cinco pilares fundamentales como son: los mapeos o diagramas de bifurcación, el exponente de Lyapunov para cada mapeo, la complejidad del sistema, el análisis espectral y el análisis estadístico descriptivo de la distribución de los atractores.

### 3.1. Diagrama de Bifurcación

El diagrama de bifurcación es una herramienta visual que muestra los valores asintóticos de  $x_n$  para cada valor del parámetro  $R$ . Permite identificar:

- Puntos fijos estables (una sola línea horizontal).
- Ciclos periódicos (múltiples líneas discretas).
- Regiones caóticas (bandas densas de puntos).
- Ventanas de periodicidad dentro del caos.

Para su generación, se realiza un barrido de valores de  $R$ . Para cada  $R$ , se itera el sistema un número suficiente de veces para eliminar el comportamiento transitorio (“warm-up iterations”) y luego se grafican los puntos subsiguientes. Para cada mapeo (seno y logístico) y para valores de parámetro  $R$  representativos de regímenes periódicos y caóticos, se sigue el siguiente procedimiento:

Se simula el mapeo  $x_{n+1} = f(x_n, R)$  para un número elevado de iteraciones ( $N = 1000$  en este estudio). Se descarta un periodo inicial de calentamiento (“warm-up iterations” = 800) para asegurar que solo se analice el comportamiento asintótico del atractor.

### 3.2. Exponente de Lyapunov

El exponente de Lyapunov ( $\lambda$ ) es una medida cuantitativa de la sensibilidad de un sistema dinámico a las condiciones iniciales.

- Si  $\lambda < 0$ : El sistema es estable, converge a un punto fijo o a un ciclo periódico.
- Si  $\lambda = 0$ : El sistema se encuentra en un estado crítico, como un punto de bifurcación.
- Si  $\lambda > 0$ : El sistema es caótico, indicando que trayectorias inicialmente cercanas divergen exponencialmente.

Se calcula como el promedio logarítmico del valor absoluto de la derivada de la función de mapeo en cada punto de la trayectoria:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx} \right|$$

Para el mapeo seno,  $f(x) = \sin(R \cdot x)$ , la derivada es  $f'(x) = R \cos(R \cdot x)$ . Para la ecuación logística,  $f(x) = Rx(1 - x)$ , la derivada es  $f'(x) = R(1 - 2x)$ . Es fácil notar que estas funciones son diferenciables y continuas, pero también poseen la propiedad de la concavidad/convexidad, esto confiere una gran riqueza en su comportamiento asintótico hacia el caos y permite a su vez el cálculo del exponente de Lyapunov. La implementación de este algoritmo no es compleja y puede ser revisada en el GitHub previamente compartido.

### 3.3. Complejidad del Sistema

Este método complementa el diagrama de bifurcación al cuantificar el número de valores distintos (redondeados para manejar la precisión de los flotantes) que alcanza la trayectoria en su estado asintótico para cada valor de  $R$ . Un bajo número de valores únicos indica periodicidad, mientras que un alto número sugiere caos.

### 3.4. Análisis Espectral (Espectrograma)

El análisis espectral se emplea para caracterizar la distribución de frecuencias de las series temporales generadas por los mapeos. Esto permite diferenciar entre el comportamiento periódico, que se manifiesta con frecuencias discretas y picos nítidos, y el comportamiento caótico, que exhibe un espectro de frecuencias continuo y de banda ancha.

Para el cálculo de la **Densidad Espectral de Potencia (PSD)** Se utiliza desde Python el método de Welch con las librerías `matplotlib.pyplot`, `pandas` y `scipy.signal`, el código completo se puede revisar en el [GitHub](#). Los resultados se presentan en gráficos de densidad espectral de potencia (en dB/Hz) versus frecuencia (ciclos/iteración).

Los valores de  $R$  seleccionados para este análisis son:

- **Mapeo Seno:**
  - Periódico:  $R = 1.6$  (punto fijo)
  - Caótico:  $R = 6.9$  (región de caos)
- **Mapeo Logístico:**
  - Periódico:  $R = 3.2$  (ciclo límite Periodo 2)
  - Caótico:  $R = 3.9$  (región de caos)

### 3.5. Análisis Estadístico de la Distribución de Atractores

Este análisis busca caracterizar la distribución de probabilidad de los valores de  $x_n$  en el atractor, revelando propiedades intrínsecas del estado estacionario del sistema. Se realiza mediante histogramas y el cálculo de momentos estadísticos.

#### 3.5.1. Histogramas de Frecuencia

1. **Generación de la Trayectoria:** Se simula nuevamente el mapeo pero esta vez para  $N = 20000$  iteraciones con un “warm-up“ de 10000 para obtener una representación fidedigna del atractor.
2. **Construcción del Histograma:** Se construye un histograma de los valores de  $x_n$  obtenidos, normalizando la altura de las barras para representar la densidad de probabilidad.
3. **Visualización:** Los histogramas permiten observar la forma de la distribución de los puntos del atractor en el espacio de fase.

Los mismos valores de  $R$  seleccionados para el análisis espectral son utilizados para la generación de histogramas.

### 3.5.2. Momentos Estadísticos

Para cuantificar la distribución de los atractores, se calculan los primeros cuatro momentos estadísticos de las trayectorias de  $x_{n+1}$  (después del transitorio):

- **Media:**  $\mu = E[X]$ , el valor promedio de la trayectoria.
- **Varianza:**  $\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$ , una medida de la dispersión de los datos alrededor de la media.
- **Asimetría:**  $\gamma_1 = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right]$ , mide la falta de simetría de la distribución. Un valor de 0 indica simetría.
- **Curtosis:**  $\gamma_2 = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right] - 3$ , mide la "puntiagudez" de la distribución y la "pesadez" de sus colas en comparación con una distribución normal. Un valor de 0 indica curtosis similar a la normal (mesocúrtica).

Estos momentos proporcionan una caracterización numérica concisa de la forma y concentración de los puntos en el atractor, siendo particularmente útiles para comparar las propiedades de los atractores caóticos de diferentes mapeos. Los resultados se tabularán para facilitar la comparación.

## 4. Resultados y Comparación

### 4.1. Diagramas de Bifurcación

Para exponer como ejemplo la situación de bifurcación de periodo dos en el proceso recursivo de  $x_{n+1} = \sin(R \cdot x_n)$ , se toma el valor de  $R \approx 2.2$ , con la condición inicial  $x_0 = 0.3$ . Como se observa en el cuadro 1, el proceso de evaluación recursivo despues de un numero grande de iteraciones (100) resultará en dos valores diferentes 0.90918 y 0.90921, es decir una bifurcación de periodo 2.

Tabla 1: Iteración recursiva de periodo 2 para  $R \approx 2.2$  y  $x_0 = 0.3$

Iteración (n)	Valor de $x_n$
0	0.30000
1	0.613117
2	0.975472
3	0.839060
4	0.962388
⋮	⋮
95	0.909181
96	0.909215
97	0.909184
98	0.909212
99	0.909187

Las figuras 1 y 2 muestran los diagramas de bifurcación para el mapeo seno y la ecuación logística, respectivamente, aquí la condición inicial no trivial como valor de partida del proceso recursivo elegida para la construcción de cada mapeo es  $x_0 = 0.3$ , aunque se hubiese podido elegir cualquier otro valor en el intervalo  $(0,1)$ , el objetivo es poder capturar los atractores de punto fijo, de ciclo límite o extraño (caótico). se evalúa la función Para garantizar que el diagrama de bifurcación muestre el comportamiento a largo plazo del sistema para cada valor de  $R$  en su dominio previamente determinado, el algoritmo computacional tomará 2000 valores de  $R$ , con un número total de 1000 iteraciones de las cuales las últimas 200 iteraciones con sus resultados correspondientes de  $x_{n+1}$  se utilizarán para generar los mapeos como conjunto de puntos  $(R, x_{n+1})$ .

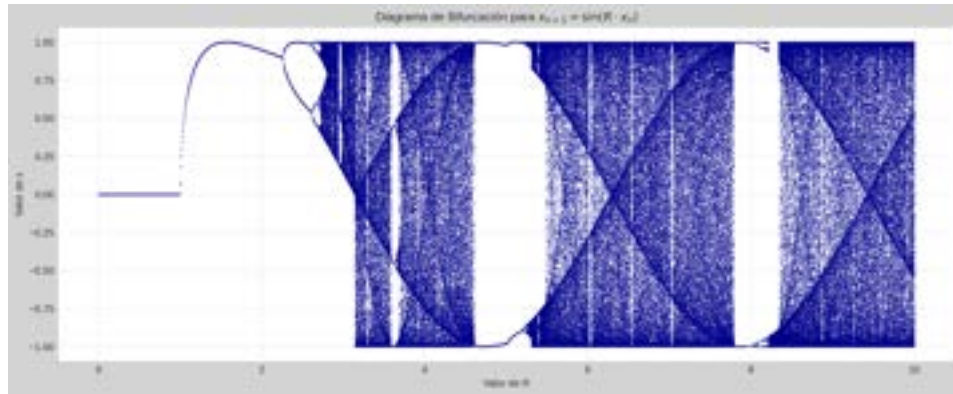


Figura 1: Diagrama de Bifurcación para  $x_{n+1} = \sin(R \cdot x_n)$

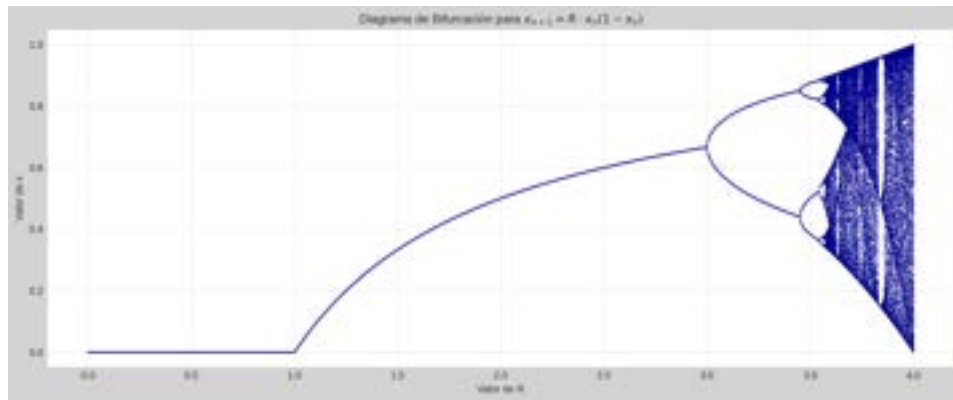


Figura 2: Diagrama de Bifurcación para la Ecuación Logística  $x_{n+1} = R x_n (1 - x_n)$

A partir de los gráficos se observa que el mapeo seno exhibe una cascada de duplicación de período seguida de caos, con varias ventanas periódicas, es decir, el atractor es de punto fijo cuando  $R \in [0, 2.3]$ , para luego observar dos bifurcaciones (período 2), luego cuatro, hasta un escenario donde las trayectorias se pierden (caos), si bien, sólo se puede realizar un deducción visual, computacionalmente se puede generar una lista de datos más precisa, en donde el atractor de punto fijo (período 1) pasa a un atractor de periodo 2 cuando  $R \approx 1.57$ , de periodo 2 a 4 cuando  $R \approx 2.2$  de periodo 4 a 8 cuando  $R \approx 2.45$ , inicio del caos cuando  $R \approx 2.716$ . La forma general del atractor caótico difiere de la logística, con un patrón más ondulado debido a la naturaleza sinusoidal de la función. El rango de  $x$  está inherentemente acotado a  $[-1, 1]$ .

El mapeo logístico muestra la clásica cascada de duplicación de período, seguida por el caos, con sus características ventanas periódicas, el paso de periodo 1 a periodo 2 ocurre exactamente en  $R = 3$ , de periodo 2 a 4 cuando  $R \approx 3.449$ , de periodo 4 a 8 en  $R \approx 3.544$  y el paso al caos cuando  $R \approx 3.569$ . El rango de  $x$  está acotado a  $[0, 1]$  (para  $R \in [0, 4]$ ). La escala del parámetro  $R$  en la que ocurren las bifurcaciones y el inicio del caos difiere significativamente entre ambos mapas. La estructura fractal del atractor caótico también presenta patrones visualmente distintos.

## 4.2. Complejidad de cada sistema

Analizar la complejidad de cada sistema (el número de estados distintos visitados) en las regiones donde ocurren las bifurcaciones y el caos, permite dar otra perspectiva sobre su dinámica y estimar visualmente los valores del parámetro  $R$  que generan las transiciones de los estados, si bien los mapas de las bifurcaciones permiten una estimación visual, como ya se analizó, se puede mejorar dicho análisis aumentando la complejidad de los cálculos, es decir, esta vez en lugar de simplemente encontrar los resultados y graficarlos, para cada valor de  $R$ , se obtienen todas las soluciones de la ecuación en iteraciones sucesivas y se almacenan en un conjunto definido. Luego se contabiliza el número de resultados no repetitivos en cada uno de estos conjuntos. Finalmente, se representan los resultados del recuento en un diagrama, las figuras 3 y 4 muestran respectivamente la complejidad para el Mapeo Logístico y el Mapeo Seno.

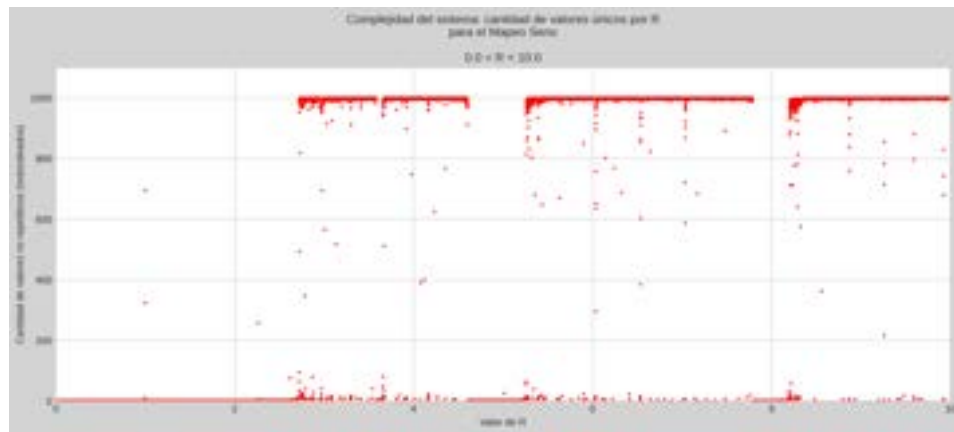


Figura 3: Diagrama de complejidad para el mapeo seno  $x_{n+1} = \sin(R \cdot x_n)$

En este paso, se calculan los resultados de la función seno y logística para 20000 valores diferentes de su correspondiente valor  $R$ . Y para cada uno de estos puntos, se aumenta el número de iteraciones consecutivas a 1200. De esta manera, obtenemos mil resultados para el valor de  $x_{n+1}$  en cada caso, pues las primeras 200 se utilizan para representar las posibles convergencias. Luego contamos los números no repetitivos de estos 1000 resultados. Por ejemplo, si todos son iguales, el número 1 (Punto Fijo), si hay dos tipos de números, el número 2 (Período=2), o si todos los resultados son diferentes, el número 1000 (Caos) es el resultado de los cálculos de este paso. Finalmente, representamos los 20,000 resultados observables en los gráficos presentados. Con esto se ratifica lo encontrado en la sección anterior.



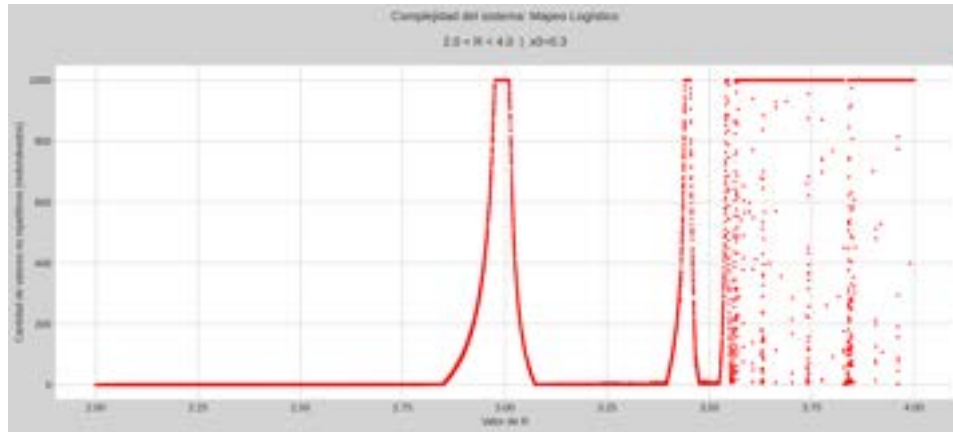


Figura 4: Diagrama de complejidad para el mapeo logístico  $x_{n+1} = R x_n (1 - x_n)$

### 4.3. Exponente de Lyapunov

La figura 5 presenta el exponente de Lyapunov en función del parámetro  $R$  para cada función.

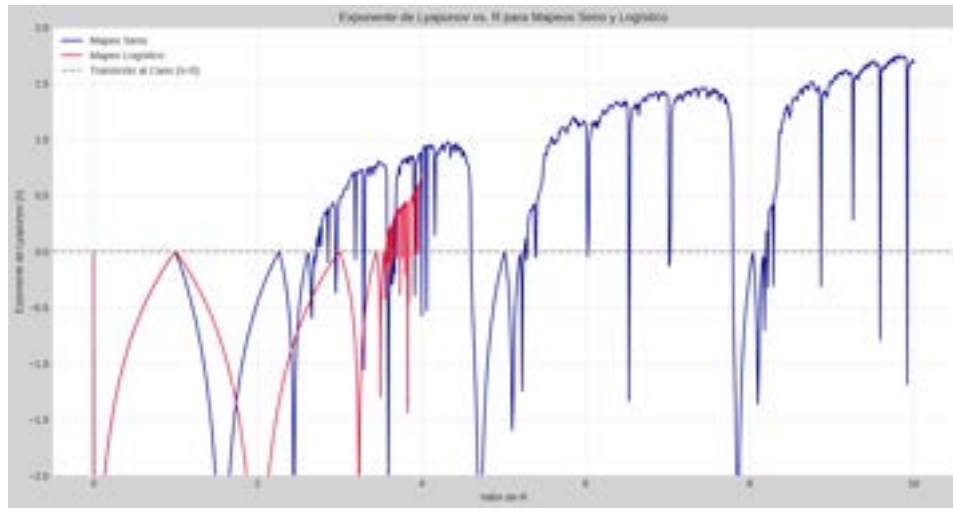


Figura 5: Exponente de Lyapunov para  $x_{n+1} = \sin(R \cdot x_n)$  y  $x_{n+1} = R x_n (1 - x_n)$

La figura 5 presenta claramente las transiciones de los estados del atractor, en el paso de lo periódico a lo caótico, la línea punteada horizontal representa el valor nulo del exponente de Lyapunov ( $\lambda = 0$ ), si  $\lambda < 0$  entonces el correspondiente mapeo estará en una región estable o periódica, pero si  $\lambda > 0$  entonces la trayectoria ha evolucionado a una región caótica, el cuadro 1 cuantifica para cada caso las primeras cinco transiciones. Para el mapeo seno se observa su primer paso al caos cuando  $R = 2.716$  mientras que para el mapeo logístico esta primer transición se da cuando  $R \approx 3.569$ . Las caídas abruptas a valores negativos dentro de las regiones caóticas confirman la presencia de ventanas de periodicidad. La transición al caos y las ventanas periódicas son claramente visibles por los cambios en el signo de  $\lambda$ . La magnitud y la distribución de los valores de  $\lambda$  son específicas para cada mapa. La forma en que  $\lambda$  se vuelve positivo, y la secuencia de las ventanas periódicas, son características de la dinámica subyacente de cada función. El valor máximo de  $\lambda$  y los rangos de  $R$  donde el caos

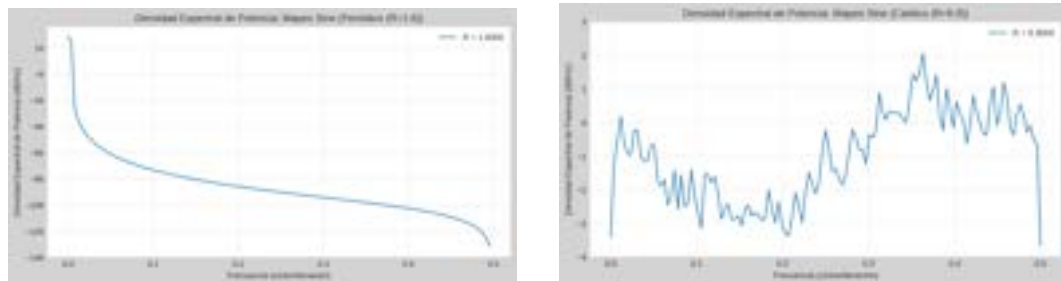
Tabla 2: Puntos de Intersección con  $\lambda = 0$

Mapeo	Valor de R en $\lambda=0$
Seno	0.010000
Seno	2.716000
Seno	2.862900
Seno	2.865100
Seno	2.953000
Logístico	0.000800
Logístico	3.569832
Logístico	3.572715
Logístico	3.572800
Logístico	3.577516

es más intenso pueden variar, pero es visiblemente mayor en el mapeo de la función seno cuando R esta en [3.5,4].

#### 4.4. Análisis Espectral (Espectrogramas)

El análisis espectral nos permite examinar las componentes de frecuencia presentes en las series temporales de los mapeos. Se presentan espectrogramas para un régimen periódico y uno caótico en cada mapeo.



(a) Mapeo Seno (R=1.6, Periódico)

(b) Mapeo Seno (R=6.9, Caótico)

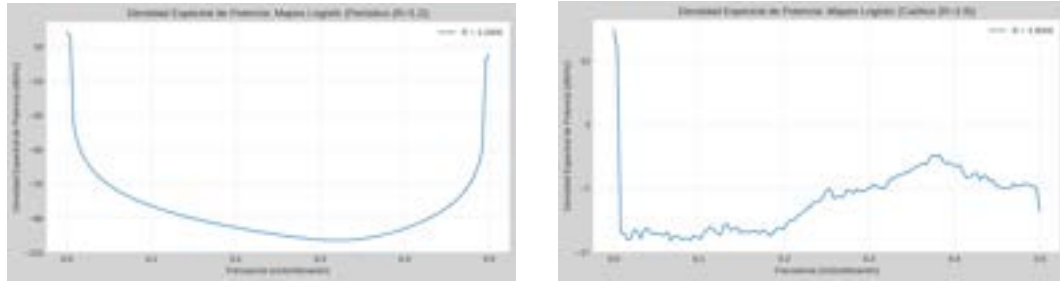
Figura 6: Densidad Espectral de Potencia para el Mapeo Seno en regímenes Periódico y Caótico.

Ambos mapeos muestran picos de frecuencia discretos, indicando el periodo del ciclo. La ubicación de estos picos revela la frecuencia fundamental del ciclo. En contraste, los espectros se vuelven continuos y ruidosos, sin picos dominantes claros, lo que es característico de las dinámicas caóticas. La distribución de las frecuencias puede variar entre los dos mapeos.

#### 4.5. Análisis Estadístico (Histogramas y Momentos)

Se examina la distribución de frecuencia de los valores de  $x_{n+1}$  en el atractor y se calculan sus momentos estadísticos clave.

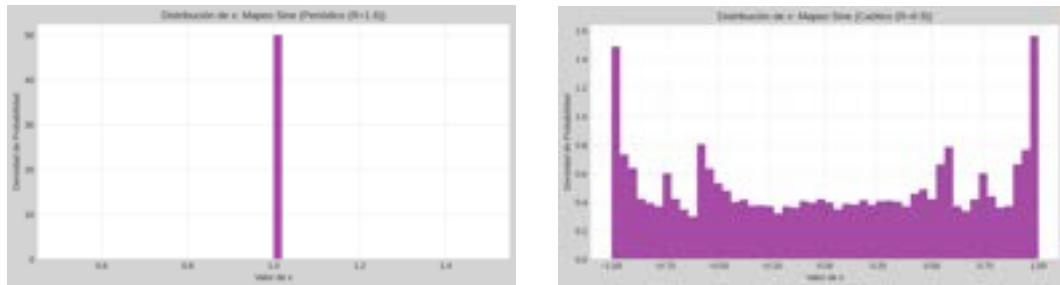
El cuadro 3 presenta los momentos estadísticos (media, varianza, asimetría, curtosis) para los regímenes seleccionados de cada mapeo.



(a) Mapeo Logístico (R=3.2, Periódico)

(b) Mapeo Logístico (R=3.9, Caótico)

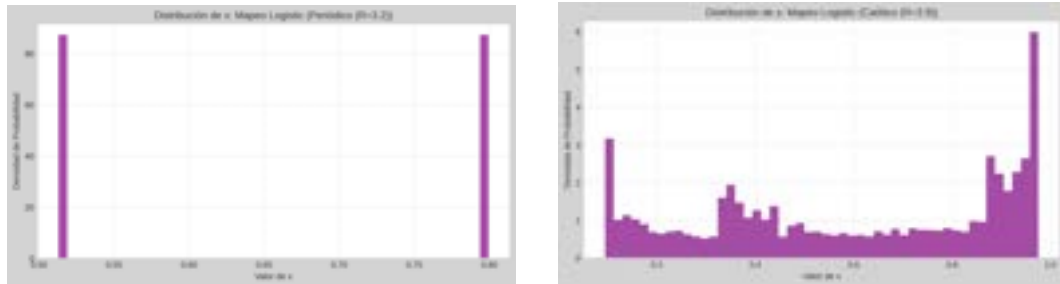
Figura 7: Densidad Espectral de Potencia para la Ecuación Logística en regímenes Periódico y Caótico.



(a) Mapeo Seno (R=1.6, Periódico)

(b) Mapeo Seno (R=6.9, Caótico)

Figura 8: Histogramas de Frecuencia para el Mapeo Seno en regímenes Periódico y Caótico.



(a) Mapeo Logístico (R=3.2, Periódico)

(b) Mapeo Logístico (R=3.9, Caótico)

Figura 9: Histogramas de Frecuencia para la Ecuación Logística en regímenes Periódico y Caótico.

Tabla 3: Momentos Estadísticos de las Trayectorias en Regímenes Periódicos y Caóticos

Mapeo	Régimen	Media	Varianza	Asimetría	Curtosis
Seno	Periódico (R=1.6)	0.99959	0.0	0.0	0.0
Seno	Caótico (R=6.9)	0.00618	0.41936	-0.01345	-1.35024
Logístico	Periódico (R=3.2)	0.65625	0.02050	-1.18153	-2.0004
Logístico	Caótico (R=3.9)	0.59430	0.08872	-0.19947	-1.40748

El análisis de los histogramas y los momentos estadísticos proporciona una caracterización detallada de la distribución de las trayectorias en los atractores de los mapeos seno y logístico, tanto en regímenes periódicos como caóticos.

Para el mapeo seno en el régimen periódico ( $R=1.6$ ) el histograma para  $R = 1.6$  muestra una única barra densa y aguda centrada en  $x \approx 1.0$ , lo que indica que el sistema converge a un punto fijo estable. Las estadísticas corroboran esta observación: la media de (0.9996) confirma la ubicación del punto fijo. La varianza nula (0.0) denota la ausencia total de dispersión, con todos los puntos concentrados en un único valor. La asimetría (0.0) y la curtosis (0.0) nulas reflejan la perfecta simetría y la naturaleza puntual de la distribución. Se deduce que el atractor es un simple punto fijo. En el régimen caótico ( $R=6.9$ ) el histograma revela una distribución continua de  $x$  a lo largo del intervalo  $[-1.0, 1.0]$ , con una notable concentración de densidad de probabilidad cerca de los extremos (aproximadamente  $x = -1.0$  y  $x = 1.0$ ) y una densidad menor en la región central (cerca de  $x = 0$ ). En cuanto a las estadísticas, la media cercana a cero (0.006) sugiere una simetría aproximada del atractor caótico alrededor del origen. La varianza significativamente mayor (0.419) confirma una alta dispersión de los puntos a lo largo del atractor. La asimetría cercana a cero (-0.013) refuerza la idea de una distribución casi simétrica. Finalmente, la curtosis negativa (-1.350) indica una distribución plana (platicúrtica), con menos concentración en el centro y colas más ligeras que una distribución normal, consistente con la propagación de valores a lo largo del rango  $[-1, 1]$ . Se deduce que el atractor es un atractor extraño que ocupa de manera densa el intervalo  $[-1.0, 1.0]$ , presentando una distribución característica no uniforme.

Para el mapeo logístico en el régimen periódico ( $R=3.2$ ) el histograma muestra dos barras discretas y densas, indicando que la trayectoria alterna entre dos valores específicos ( $x \approx 0.51$  y  $x \approx 0.79$ ). Las estadísticas complementan esta visualización: la media (0.656) representa el valor promedio de los dos puntos del ciclo. La varianza pequeña pero no nula (0.020) refleja la dispersión entre estos dos puntos discretos. La asimetría negativa considerable (-1.182) y la curtosis marcadamente negativa (-2.000) son características de una distribución compuesta por pocos puntos discretos, inherentemente plana y sesgada al compararse con una distribución continua. El atractor es un ciclo de período 2. En el régimen caótico ( $R=3.9$ ) el histograma revela una distribución continua con estructuras de bandas y brechas (valles), donde ciertas regiones de  $x$  son visitadas con mayor frecuencia y otras son evitadas. En términos de estadísticas, la media (0.594) es el promedio de los valores visitados en el atractor. La varianza (0.089) es significativamente mayor que en el régimen periódico, indicando una mayor dispersión de la trayectoria en el caos. La asimetría levemente negativa (-0.199) sugiere una ligera inclinación de la distribución hacia valores más bajos. La curtosis negativa (-1.407) confirma que la distribución es plana (platicúrtica), reflejando la dispersión de la densidad a través de las bandas caóticas y la ausencia de un pico central prominente. Se deduce que el atractor es un atractor extraño compuesto por múltiples bandas caóticas, que aún no llenan completamente el espacio de fase, dejando brechas.

La transición de orden a caos se refleja consistentemente en el aumento significativo de la varianza, lo que demuestra la mayor dispersión de los atractores caóticos en comparación con los puntos fijos o ciclos periódicos.

Las formas de los atractores caóticos son distintivas para cada mapeo. El mapeo seno caótico tiende a una distribución más simétrica y globalmente extendida en  $[-1, 1]$  con densidad concentrada en los extremos. En contraste, el mapeo logístico caótico en  $R = 3.9$  revela una estructura de bandas discretas con brechas, lo que se cuantifica por sus valores específicos de asimetría y curtosis. Estos momentos estadísticos actúan como huellas dactilares numéricas, caracterizando de forma concisa la compleja geometría y distribución de los atractores. Se hicieron otras simulaciones para valores distintos de  $R$  con régimen caótico, obteniendo

distribuciones continuas que se concentra mayormente a los extremos, es decir exponen un comportamiento similar pero con valores diferentes para el promedio y la varianza, sería interesante analizar si la diferencia entre medias y varianzas es significativa, para lo cual se requiere un estudio estadístico inferencial más profundo.

## 5. Conclusiones

La exploración del mapeo seno confirma que la cascada de duplicación de período y el comportamiento caótico no son exclusivos de la ecuación logística, sino propiedades más generales de los sistemas dinámicos no lineales unimodales. Aunque ambos sistemas exhiben caos, la naturaleza de sus atractores y las regiones de estabilidad/caos en el espacio de parámetros  $R$  son distintivas. El exponente de Lyapunov provee una validación cuantitativa de las observaciones visuales del diagrama de bifurcación, permitiendo una comprensión más profunda de la dinámica.

El análisis espectral corrobora la presencia de picos discretos en el comportamiento periódico y un espectro continuo en el caos, diferenciando claramente estos regímenes. Por otro lado, los histogramas y los momentos estadísticos ofrecen una caracterización detallada de la distribución espacial de los atractores, revelando sutiles diferencias en la textura y la forma de los estados caóticos entre el mapeo seno y el logístico.

Continuar explorando las propiedades de universalidad, como la constante de Feigenbaum, para el mapeo seno requeriría métodos numéricos más sofisticados para la detección precisa de los puntos de bifurcación, así también, un estudio estadístico más profundo de la distribución de las frecuencias de los atractores caóticos, la diferencia de medias y varianzas para valores diferentes de  $R$  en los regímenes caóticos, análisis de convergencias y estimación de momentos sería el siguiente paso para caracterizar la aleatoriedad aparente en un sistema caótico-determinista.

## Referencias

- [Abarbanel(1996)] Henry D. I. Abarbanel. *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer-Verlag, New York, 1996. doi: 10.1007/978-1-4612-0752-1. [2](#)
- [Demir et al.(2020)Demir, Tuncer, and Kocamaz] Fatih B. Demir, Turgay Tuncer, and Ali Fatih Kocamaz. A chaotic optimization method based on logistic-sine map for numerical function optimization. *Neural Computing and Applications*, 32(17):14227–14239, 2020. [2](#)
- [Feigenbaum(1978)] Mitchell J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19(1):25–52, 1978. doi: 10.1007/BF01020332. [2](#)
- [Gleick(2008)] James Gleick. *Chaos: Making a new science*. Penguin, 2008. [2](#)
- [Hua et al.(2019)Hua, Zhou, and Zhou] Zongting Hua, Bing Zhou, and Yicong Zhou. Sine Chaotification Model for Enhancing Chaos and Its Hardware Implementation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 66(2):1273–1284, Feb 2019. doi: 10.1109/TIE.2018.2833049. [2](#)
- [Lalescu(2010)] Claudiu C. Lalescu. Patterns in the sine map bifurcation diagram, 2010. [2](#)
- [Li and Yorke(1975)] Tien-Yien Li and James A. Yorke. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10):985–992, 1975. doi: 10.2307/2319753. [2](#)
- [Mansouri and Wang(2020)] Abdenour Mansouri and Xiaofeng Wang. A novel one-dimensional sine powered chaotic map and its application in a new image encryption scheme. *Information Sciences*, 520:46–62, 2020. [2](#)
- [May(1976)] Robert M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560):459–467, 1976. doi: 10.1038/261459a0. [2](#)
- [Schifter(2024)] Isaac Schifter. *La ciencia del caos*, volume 142. Fondo de Cultura Económica, 2024. [2](#)